25-04-2017

$K[x_1, \dots x_n]$ σώμα

<u>Μονώνυμο (M)</u> στις μεταβλητές $x_1, x_2, \dots x_n$ είναι ένα γινόμενο της μορφής $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$, $m_i \in \mathbb{N}_0$

<u>Βαθμός του μονωνύμου</u> $M = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$ είναι το

$$\deg(M) = m_1 + m_2 + \dots + m_n$$

* Ένα πολυώνυμο f στις μεταβλητές $x_1, x_2, \dots x_n$ με συντελεστές από το σώμα K είναι ένας πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός μονωνύμων δηλαδή

$$f = \sum a(m_1, \dots m_n) x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$$

όπου ο συντελεστής $a(m_1, \dots m_n)$ είναι μηδέν εκτός από πεπερασμένες περιπτώσεις.

Αν $a(m_1, \dots m_n) \neq 0$ τότε το $a(m_1, m_2, \dots m_n) x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$ λέγεται <u>όρος</u> του πολυωνύμου

<u>Π.Χ.</u> $f(x) = 3x_1^2 x_2^3 x_3^5 - 7x_1x_2x_4 + x_4^{13} - x_1x_2$

οι όροι του είναι: $3x_1^2x_2^3x_3^5$, $-7x_1x_2x_4$, x_4^{13}, $-x_1x_2$

$$g(x) = 2x_1^3 \cancel{x_2 x_3} - 7x_1x_2^2x_3 - 2x_1^3 \cancel{x_2x_3} + 3x_1x_2x_3$$

Το $g(x)$ έχει ένα μόνο όρο $-4x_1x_2^2x_3$

<u>Βαθμός όρου</u> ονομάζεται ο <u>βαθμός του μονωνύμου του</u>

* Βαθμός πολυωνύμου ονομάζεται ο μέγιστος βαθμός από τους βαθμούς των όρων του.

Π.χ. $\deg f(x) = 13$, $\deg g(x) = 4$ (από το προηγούμενο παράδειγμα) □

* Ομογενές λέγεται ένα πολυώνυμο που όλοι οι όροι του έχουν τον ίδιο βαθμό.

Π.χ. $f(x_1,x_2,x_3) = 3x_1^2 x_2 x_3 - 11 x_1^4 + 5 x_1 x_2^3$

$g(x_1,x_2,x_3) = 4x_1^4 - 5x_2^4 + x_1^2 x_3^2 - 7$

Το $f(x_1,x_2,x_3)$ είναι ομογενές, ενώ το $g(x_1,x_2,x_3)$ δεν είναι ομογενές □

• Έστω $f \in K[x_1, \dots x_n]$. Το $M(f)$ είναι ένα ομογενές πολυώνυμο που αποτελείται από τους μεγιστοβάθμιους όρους του f. Το $E(f)$ είναι ένα ομογενές πολυώνυμο που αποτελείται από τους ελαχιστοβάθμιους όρους του f.

Π.χ. $f = 3x_1^2 x_2^3 - 7x_1^4 x_3 + x_3^5 - 4x_1x_2x_3 + 7x_1 - 2x_3$

Το $M(f) = 3x_1^2x_2^3 - 7x_1^4x_3 + x_3^5$

Το $E(f) = 7x_1 - 2x_3$ □

f ομογενές $\Leftrightarrow E(f) = M(f)$

f όχι ομογενές $f = M(f) + \dots + E(f)$

Παραδείγματα

$$f(x,y) = \underbrace{x^2 - y^2}_{\to (x-y)(x+y)} - 3x + y - 5$$

$$g(x,y) = \underbrace{x^2 - y^2} - \underbrace{3x + y} \Longrightarrow \cancel{\exists}$$

$$h(x,y) = x^3 - 3y^2x + 4y^2 - x^2 + x - y + \underbrace{7}$$

$$l(x,y) = x^3 - \underbrace{3y^2x} + 4y^2 - x^2 + \underbrace{x - y}$$

$$\to M(\cdot) = x(x^2 - 3y^2) = x(x-\sqrt{3}y)(x+\sqrt{3}y)$$

Σχόλιο

Το μεγάλο κομμάτι το $x^2 - y^2$ μας λέει τη συμπεριφορά της καμπύλης στο άπειρο. Ενώ το μικρό κομμάτι το $-3x+y$ μας λέει τη συμπεριφορά της καμπύλης στην αρχή των αξόνων.

Το ίδιο ισχύει και για τα υπόλοιπα.

Το $M(f)$ σπάει σε πρωτοβάθμια πάντα; Αν περιοριστούμε πάνω από τους πραγματικούς δεν γίνεται.
Όμως, πάνω από τους μιγαδικούς αν έχουμε και δύο μεταβλητές, επειδή το σύστημα είναι ομογενές πάντα σπάει σε πρωτοβάθμιους.

Παρατήρηση!

• Το προβολικό επίπεδο P^2_K πάνω από το K, όπου K είναι σώμα

$$P^2_K = K^3 - \{(0,0,0)\} / \sim$$ (έχω θεωρήσει μια σχέση ισοδυναμίας $\sim$)

$\sim$ $(x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2)$ αν και μόνο αν $\exists\ t \in K^*$ τω
$x_1 = t x_2,\ y_1 = t y_2,\ z_1 = t z_2$

Σχόλιο: $(1,1,1) \in P^2_{\mathbb{R}} \rightarrow (1,1,1) = (2,2,2) = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\sqrt{2})$
στο προβολικό επίπεδο κάθε σημείο έχει άπειρους τρόπους αναπαράστασης
$(1,1,1) \in P^2_{\mathbb{C}}$ $(1,1,1) = (i, i, i) = (1+\sqrt{3}i, 1+\sqrt{3}i, 1+\sqrt{3}i)$
το $(0,0,0)$ δεν ανήκει στο P^2_K για οποιοδήποτε K.
Δεν γίνεται και οι 3 συντ/νες να είναι μηδέν

• Ο προβολικός n-διάστατος χώρος πάνω από το σώμα K → P^n_K

$$P^n_K = K^{n+1} - \{(\underbrace{0,0,0,\ldots 0,0}_{n+1})\} / \sim$$

Ορίζω σχέση ισοδυναμίας $\sim$: $(x_1, x_2, \ldots x_{n+1}) \sim (y_1, y_2, \ldots, y_{n+1})$ αν και μόνο αν υπάρχει $t \in K^* = K - \{0\}$ τέτοιο ώστε:
$x_1 = t y_1,\ x_2 = t y_2, \ldots x_{n+1} = t y_{n+1}$

• $P^2_{\mathbb{Z}_3}$ (, ,) → 3 στοιχεία, → 3 στοιχεία, → 3 στοιχεία — κάθε σημείο έχει 2 αναπαραστάσεις
$\|$
$\mathbb{Z}_3^3 - \{(0,0,0)\} / \sim$ ← έβγαλα και το Z γιατί την έκανα ομογενή

$\dfrac{27-1}{2} = 13$ είναι τα σημεία που έχει ο συγκεκριμένος χώρος

Πόσες ευθείες έχω: Η ευθεία έχει εξίσωση $ax + by + \gamma z = 0$
Μια ευθεία στον $\mathbb{Z}_3$ έχω 2 διαφορετικές περιγραφές (με το 1 και το 2)
έχω $\dfrac{26}{2} = 13$ ευθείες
Δεν παίρνει το 0

Ποιες είναι οι δευτεροβάθμιες καμπύλες στον P^2_K ($P^2_{Z_3}$);

Αν η ερώτηση γινόταν στην αναλυτική γεωμετρία θα έπαιρνα: $\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y + \zeta = 0$

Στον προβολικό χώρο θα πάρω την ομογενή της προηγούμενης εξίσωσης. Τι κάνω; Αρκεί να προσθέσω άλλη μια μεταβλητή την z.
Οπότε έχουμε την εξής:

$$\underset{3}{\alpha} x^2 + \underset{3}{\beta} xy + \underset{3}{\gamma} y^2 + \underset{3}{\delta} xz + \underset{3}{\varepsilon} yz + \underset{3}{\zeta} z^2 = 0$$

$\dfrac{3^6 - 1}{2}$ δευτεροβάθμιες καμπύλες

$1 \to$ (για το μηδέν)

$2 \to$ κάθε εξίσωση παριστάνεται με 2 τρόπους □

$P^5_{Z_3}$ Ένα σημείο στον συγκεκριμένο προβολικό επίπεδο γράφεται ως εξής $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta)$

πόσες έχω; $\dfrac{3^6 - 1}{2}$

$1 \to$ (όταν είναι $0, 0, \ldots$)

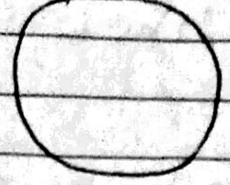
$2 \to$ γράφεται με 2 τρόπους κάθε σημείο

Επομένως έχω $\dfrac{3^6 - 1}{2}$ □

προσοχή

Ορισμός: Μια καμπύλη στον προβολικό επίπεδο P^2_K είναι ένας **κώνος** με κορυφή την αρχή των αξόνων και περιγράφεται από ένα ομογενές πολυώνυμο στις μεταβλητές x, y, z.

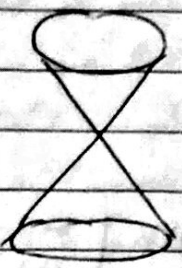
• Βρίσκομαι στο επίπεδο K^2 και έχω την εξίσωση x^2+y^2-1
έχω την καμπύλη $V(x^2+y^2-1)$



$z=1$

P^2_K

Για να πάω στο προβολικό επίπεδο ομογενοποιώ την x^2+y^2-1 και έχω τον κώνο $V(x^2+y^2-z^2)$

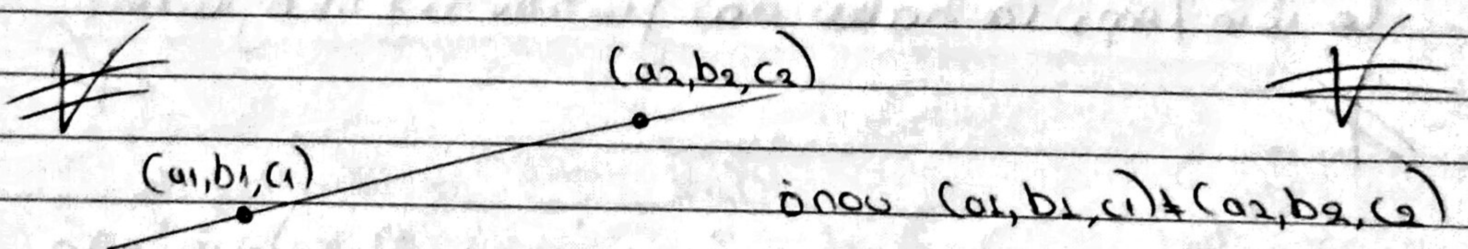


$x+y=z$ $\qquad$ $z=1$

→ όλα είναι ομογενής

Για να πάω από το προβολικό στο κανονικό επίπεδο απομογενοποιώ.

• Οι προβολικές ευθείες είναι επίπεδα του K^3 που διέρχονται από την αρχή των αξόνων (δηλ το σημείο $(0,0,0)$).
Άρα, είναι της μορφής $aX+\beta Y+\gamma Z=0$
$V(aX+\beta Y+\gamma Z)$



όπου $(a_1,b_1,c_1)\neq(a_2,b_2,c_2)$

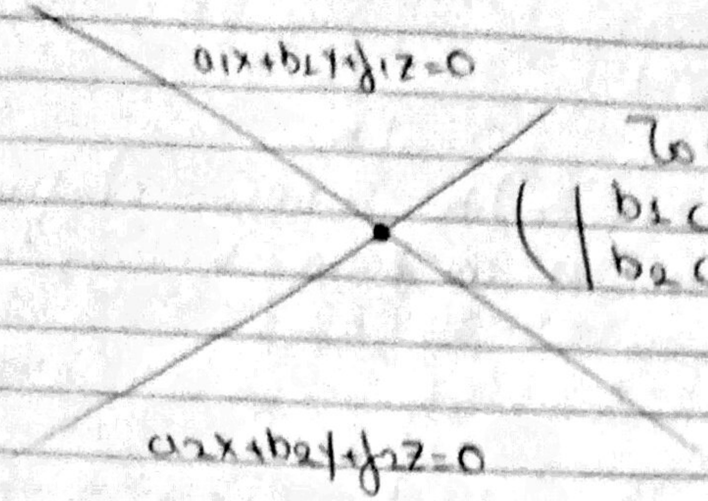
η εξίσωση της ευθείας $\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}=0$

$\Updownarrow$

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} X + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} Y + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} Z = 0$$

$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}=2$ που σημαίνει ότι 1 από τις υποορίζουσες είναι διαφορετική του μηδενός.

Έστω, τώρα έχω 2 ευθείες την $a_1x+b_1y+\gamma_1z=0$ και την $a_2x+b_2y+\gamma_2z=0$. Είναι στο προβολικό επίπεδο



Το σημείο τομής των ευθειών =
$$\left(\begin{vmatrix} b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_1 & a_1\\ c_2 & a_2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\right) \neq (0,0,0)$$

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{pmatrix} = 2$$

Για να δείξω ότι το σημείο τομής είναι σημείο της ευθείας

$$a_1\begin{vmatrix} b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix} + b_1\begin{vmatrix} c_1 & a_1\\ c_2 & a_2\end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix} = 0$$

Το ίδιο μπορώ να κάνω και για την άλλη εξίσωση.

Έστω τώρα έχω παραπάνω από 2 σημεία στο προβολικό επίπεδο. Έστω έχω 5 σημεία.

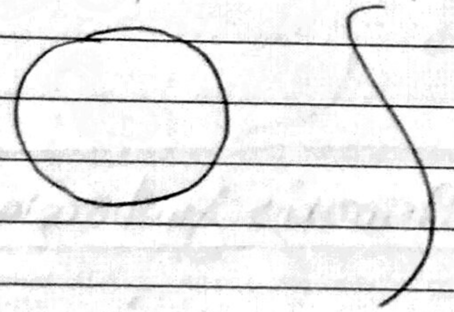
- (a_1, b_1, c_1)
- (a_2, b_2, c_2)
- (a_4, b_4, c_4)
- (a_3, b_3, c_3)
- (a_5, b_5, c_5)

$$\begin{vmatrix} X^2 & Y^2 & Z^2 & XY & XZ & YZ \\ a_1^2 & b_1^2 & c_1^2 & a_1b_1 & a_1c_1 & b_1c_1 \\ a_2^2 & b_2^2 & c_2^2 & a_2b_2 & a_2c_2 & b_2c_2 \\ a_3^2 & b_3^2 & c_3^2 & a_3b_3 & a_3c_3 & b_3c_3 \\ a_4^2 & b_4^2 & c_4^2 & a_4b_4 & a_4c_4 & b_4c_4 \\ a_5^2 & b_5^2 & c_5^2 & a_5b_5 & a_5c_5 & b_5c_5 \end{vmatrix} = 0$$

Η εξίσωση της δευτεροβάθμιας καμπύλης που διέρχεται από τα 5 σημεία

Ελέγχω αν η συγκεκριμένη δευτεροβάθμια καμπύλη περνάει από τα συγκεκριμένα 5 σημεία. Αρκεί να βάλω όπου X το a_i, όπου Y το b_i και όπου Z το c_i (με $i=1,\dots,5$) η ορίζουσα θα έχει 2 γραμμές ίσες $\Rightarrow$ θα είναι μηδέν.

$$x^3 - y^2x + 2yx + y^3 - 3x + 7 = 0 \quad (*)$$



$Z = 1$

Έχω επιφάνεια 3ου βαθμού $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$

Αν θέλω να δω πως θα μοιάζει στο προβολικό επίπεδο ομογενοποιώ (βάζω μια ακόμα μεταβλητή Z ώστε όλα να είναι 3ου βαθμού)

Δηλαδή,

$$x^3 - y^2x + 2yxZ + y^3 - 3xZ^2 + 7Z^3 = 0 \quad (1)$$

Για να πάω από το προβολικό στο κανονικό, βάζω στην (1) όπου $Z=1$ και έχω την σχέση (*)

Αν βάλω $Z=0$ θα μένει μόνο το $M(A) = x^3 - y^2x$, θα έχω τα σημεία στο άπειρο το $\mu(f) = x^3 - y^2 x = x(x-y)(x+y)$

$(0,1,0)$

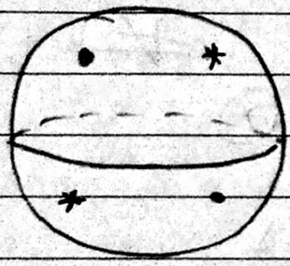
$(1,1,0)$

$(1,-1,0)$

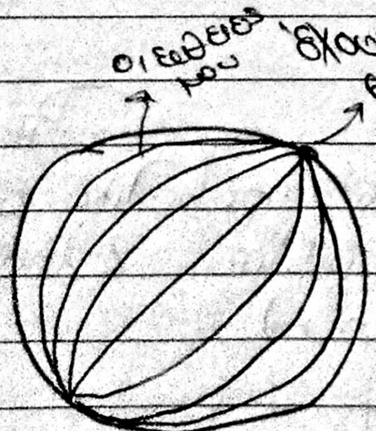
$\cancel{\#}$ έχω το προβολικό επίπεδο $P^2_{\mathbb{R}}$

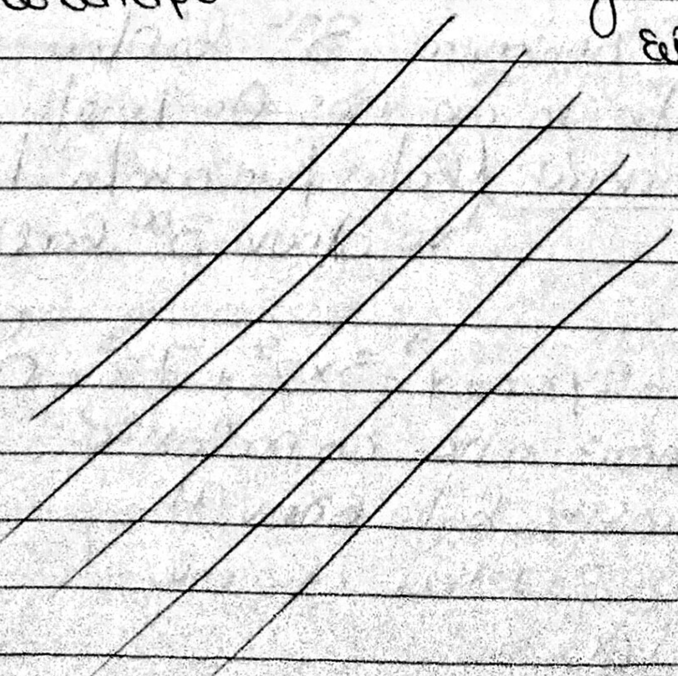
έχω τη σφαίρα με εξίσωση $x^2+y^2+z^2=1$, η οποία εφάπτεται στο επίπεδο $z=1$.

Σφαιρικό μοντέλο του πραγματικού προβολικού επιπέδου είναι το σύνολο των σημείων της σφαίρας $x^2+y^2+z^2=1$ του $\mathbb{R}^3$, όπου τα αντιδιαμετρικά σημεία ταυτίζονται.



$\boxed{\text{το } P^2_{\mathbb{R}} \text{ είναι παράδειγμα ελλειπτικής γεωμετρίας}}$





Το μοντέλο του δίσκου του πραγματικού προβολικού επιπέδου $P^2_{\mathbb{R}}$ είναι η προβολή ενός ημισφαιρίου της σφαίρας $x^2+y^2+z^2=1$ στο επίπεδο του μέγιστου κύκλου του μαζί με τον μέγιστο κύκλο.
Κάθε σημείο του εσωτερικού του δίσκου, αντιστοιχεί στο προβολικό σημείο και αντιδιαμετρικά σημεία του μέγιστου κύκλου αντιστοιχούν σ' ένα προβολικό σημείο.

Κανονικό επίπεδο | Μοντέλο δίσκου